Convenções: Consideramos o sistema de coordenadas cartesiano a menos que haja indicação contrária.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	: denota o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	: denota o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	: denota o conjunto dos números complexos.
i	: denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$.
$M_n(\mathbb{R})$	: denota o conjunto das matrizes $n \times n$ de entradas reais.
$\overline{AB}$	: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos A e B.
$A\hat{O}B$	: denota o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com vértice no ponto O.
$m(\overline{AB})$	: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$

1

Sejam a e b números reais positivos. Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} -ax + by + az = 0 \\ b^2x + a^3y + 4a^2z = 0 \\ 4a^2x + a^3y + b^2z = 0 \end{cases}$$

Sabendo que esse sistema admite solução não trivial, determine b em função de a. Determine o conjunto solução do sistema para $a = \dfrac{1}{2}$.

Resolução

1) Como o sistema admite solução não trivial, então:

$$\begin{vmatrix} -a & b & a \\ b^2 & a^3 & 4a^2 \\ 4a^2 & a^3 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -a^4b^2 + 16a^4b + a^4b^2 - 4a^6 + 4a^6 - b^5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^5 - 16a^4b = 0 \Rightarrow b\,.\,(b^4 - 16a^4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ (não convém, pois } b > 0)$$

ou

$b^4 = 16a^4 \Rightarrow b = 2a$, pois a e b são positivos.

Assim, $b = 2a$.

2) Se $a = \frac{1}{2}$ temos $b = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ e, o sistema resulta:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x + \frac{1}{8}y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + \frac{1}{8}y + z = 0 \end{cases} \oplus$$

$$\frac{17}{8}y + 2z = 0 \Rightarrow y = -\frac{16}{17} \cdot z$$

3) $-x + 2 \cdot \left(-\frac{16}{17}z\right) + z = 0 \Rightarrow x = -\frac{15}{17} \cdot z$

Assim, fazendo $z = \alpha$, a solução do sistema pode ser escrita como:

$$S = \left\{\left(-\frac{15}{17} \cdot \alpha; -\frac{16}{17} \cdot \alpha; \alpha\right), \forall \alpha\right\}$$

Resposta: $b = 2a$ e

$$S = \left\{\left(-\frac{15}{17} \cdot \alpha; -\frac{16}{17} \cdot \alpha; \alpha\right), \forall \alpha\right\}$$

2

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os números $a \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $M = \alpha^2 A + \alpha B + C$ é invertível.

Resolução

1) $$M = \begin{bmatrix} \alpha^2 & -2\alpha^2 \\ -2\alpha^2 & \alpha^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha \\ 6\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} \alpha^2 + 3 & -2\alpha^2 + 6\alpha + 3 \\ -2\alpha^2 + 6\alpha + 3 & \alpha^2 + 3 \end{bmatrix}$$

2) **A matriz é invertível se det M $\neq 0$.**

3) $\det M = (\alpha^2 + 3)^2 - (-2\alpha^2 + 6\alpha + 3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det M = (-\alpha^2 + 6\alpha + 6)(3\alpha^2 - 6\alpha)$

4) $\det M \neq 0 \Rightarrow (-\alpha^2 + 6\alpha + 6) \cdot (3\alpha^2 - 6\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 6\alpha + 6 \neq 0$ e $3\alpha^2 - 6\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \neq 3 + \sqrt{15}$ e $\alpha \neq 3 - \sqrt{15}$ e $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$

Resposta: $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq 3 + \sqrt{15}$ e $\alpha \neq 3 - \sqrt{15}$ e $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2\}$

3

Determine o conjunto solução da inequação

$$\log_{2^{-x}}\left(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}\right) > \log_{2^{-x}}\left(\sqrt[3]{3}\right).$$

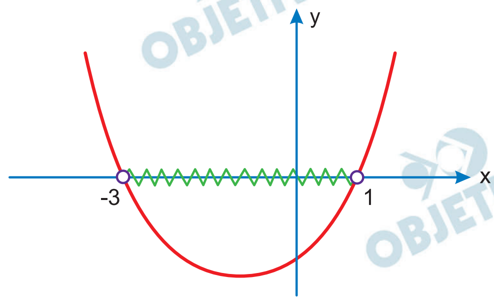
Resolução

Condição de existência

1) $-\sqrt[3]{x^2+2x-3} > 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 < x < 1$, pois o gráfico da função

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ é do tipo



2) **Se $x > 0$ então $0 < 2^{-x} < 1$ e, portanto,**

$\log_{2^{-x}}\left(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}\right) > \log_{2^{-x}}\left(\sqrt[3]{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt[3]{x^2+2x-3} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow -(x^2+2x-3) < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x(x+2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < -2$ **ou** $x > 0 \Rightarrow x > 0$ **(pela hipótese feita)**

De $-3 < x < 1$ **e** $x > 0$ **resulta** $0 < x < 1$

3) **Se $x < 0$, então $2^{-x} > 1$ e, portanto,**

$\log_{2^{-x}}\left(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}\right) > \log_{2^{-x}}\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt[3]{x^2+2x-3} > \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow -(x^2+2x-3) > 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$

Todos os valores de x do intervalo $]-2; 0[$ são soluções, pois $]-2; 0[\subset]-3; 1[$.

4) **Dos itens (2) e (3) concluímos que o conjunto solução de inequação é a única dos dois intervalos.**

Resposta: $]-2; 0[\cup]0; 1[$

Considere o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $q(x) = x^{10} - 1$ por $p(x)$ e encontre todas as raízes complexas de $p(x)$.

Resolução

$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

e, portanto, $p(x)$ é a soma dos termos da PG $(1, -x, x^2, -x^3, x^4)$.

Assim, temos:

$$p(x) = \frac{1 \,.\, [(-x)^5 - 1]}{-x - 1} = \frac{-x^5 - 1}{-x - 1} = \frac{x^5 + 1}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) \,.\, (x + 1) = x^5 + 1$$

Fatorando $q(x)$, temos:

$$q(x) = x^{10} - 1 = (x^5 - 1) \,.\, (x^5 + 1)$$

Dividindo $q(x)$ por $p(x)$, temos:

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{(x^5 - 1).(x^5 + 1)}{\dfrac{(x^5 + 1)}{(x + 1)}} =$$

$$= (x^5 - 1) \,.\, (x^5 + 1) \,.\, \frac{(x + 1)}{(x^5 + 1)}$$

$$\frac{q(x)}{p(x)} = (x^5 - 1) \,.\, (x + 1) = x^6 + x^5 - 1x - 1$$

O quociente da divisão é $x^6 + x^5 - 1x - 1$ e o resto é zero.

Como $p(x) \,.\, (x + 1) = x^5 + 1$, as raízes complexas de $p(x)$ são as raízes quintas de -1, exceto o -1 do fator $x + 1$.

As raízes quintas de
$-1 = 1 \,.\, (\cos 180° + i \,.\, \text{sen } 180°)$,

$$z_k = \sqrt[5]{1} \,.\, \left[\cos\left(\frac{180°}{5} + k \,.\, 72°\right) + \right.$$

$$\left. + i \,.\, \text{sen}\left(\frac{180°}{5} + k \,.\, 72°\right)\right]$$

com $k \in \{0, 1, \cancel{2}, 3, 4\}$ com $k \neq 2$, pois $z_2 = -1$ não é raiz de $p(x)$

As raízes de $p(x)$ são, portanto

$$z_0 = \cos 36° + i \,.\, \text{sen } 36°$$

$z_1 = \cos 108° + i \,.\, \text{sen } 108°$

$z_3 = \cos 252° + i \,.\, \text{sen } 252°$

$z_4 = \cos 324° + i \,.\, \text{sen } 324°$

Resposta: O quociente é $x^6 + x^5 - x - 1$ e o resto é zero.
As raízes complexas de p(x) são z_0, z_1, z_3 e z_4 acima apresentadas.

Sejam $A = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$ e $B = \text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcule $\text{sen}(\alpha - \beta)$ em função de A e B, sabendo que A e B não são ambos nulos.

Resolução

I) $$A = \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 . \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) . \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$B = \text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta) = 2 . \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) . \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Logo, $$\frac{B}{A} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \text{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

II) $$\text{sen}(\alpha - \beta) = 2 . \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) . \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{2 . \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) . \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = 2 . \text{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) . \frac{1}{\sec^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

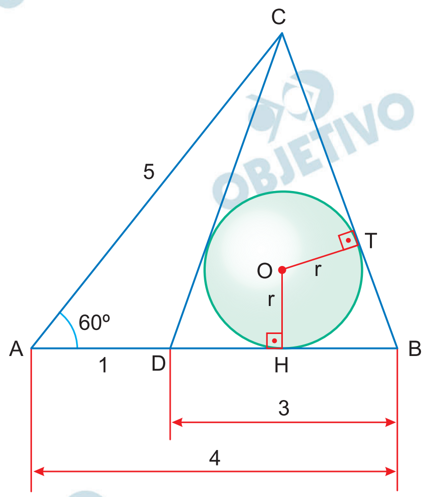
$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{2 . \text{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{2 . \frac{B}{A}}{1 + \frac{B^2}{A^2}} = \frac{2 . \frac{B}{A}}{\frac{A^2 + B^2}{A^2}} = \frac{2 . A . B}{A^2 + B^2}$$

Resposta: $$\frac{2 . A . B}{A^2 + B^2}$$

Considere um triângulo ABC tal que $m(\overline{AB}) = 4$, $m(\overline{AC}) = 5$ e $B\hat{A}C = 60°$. Seja D um ponto no lado $\overline{AB}$ tal que $m(\overline{AD}) = 1$. Encontre o raio do círculo inscrito no triângulo BCD.

Resolução



I) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$(BC)^2 = 4^2 + 5^2 - 2 . 4 . 5 . \cos 60° = 16 + 25 - 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

II) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ACD, temos:

$$(CD)^2 = 5^2 + 1^2 - 2 . 1 . 5 . \cos 60° = 25 + 1 - 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CD = \sqrt{21}$$

III) Como $BC = CD = \sqrt{21}$, o triângulo BCD é isósceles e, portanto, $DH = BH = \dfrac{3}{2}$

IV) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CHD, temos:

$$(CH)^2 + (DH)^2 = (CD)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (CH)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{21}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (CH)^2 = 21 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4} \Rightarrow CH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

V) Sendo r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo BCD, da semelhança dos triângulos CTO e CHB, temos:

$$\frac{TO}{HB} = \frac{CO}{CB} \Rightarrow \frac{r}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2} - r}{\sqrt{21}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{21} \,.\, r = \frac{15\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{21} + \frac{3}{2}\right) . \, r = \frac{15\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{2\sqrt{21} + 3} =$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4\sqrt{21} + 6} \cdot \frac{4\sqrt{21} - 6}{4\sqrt{21} - 6} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10}$$

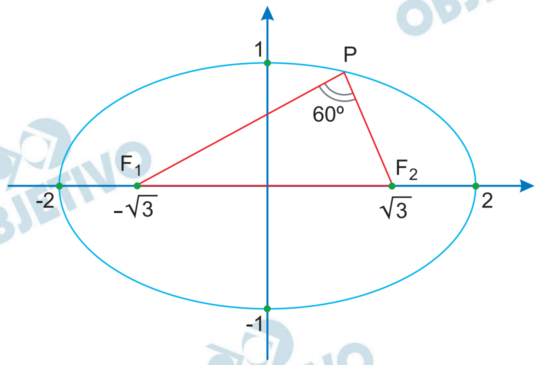
Resposta: $\dfrac{6\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10}$

Determine os Pontos P pertencentes à elipse E definida pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, tais que os segmentos de reta que ligam P aos focos de E formam um ângulo de 60°.

Resolução

I) A elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ possui centro na origem, semieixo maior horizontal a = 2 e semi-eixo menor vertical b = 1. Sendo 2f a distância focal, temos:

$$f^2 + b^2 = a^2 \Leftrightarrow f^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow f = \sqrt{3}$$



II) Seja P (x, y) um ponto pertencente à elipse. Usando a Lei dos Cossenos no triângulo PF_1F_2:

$$(F_1F_2)^2 = (PF_1)^2 + (PF_2)^2 - 2 \cdot (PF_1) \cdot (PF_2) \cdot \cos 60°$$

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = (PF_1)^2 + (PF_2)^2 - 2 \cdot (PF_1) \cdot (PF_2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$12 = (PF_1)^2 + (PF_2)^2 - (PF_1) \cdot (PF_2)$$

$$(PF_1) \cdot (PF_2) = (PF_1)^2 + (PF_2)^2 - 12$$

III) Da definição de elipse, vem:

$$(PF_1) + (PF_2) = 2a \Leftrightarrow (PF_1) + (PF_2) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (PF_1)^2 + 2 \cdot (PF_1) \cdot (PF_2) + (PF_2)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (PF_1)^2 + 2 \cdot [(PF_1)^2 + (PF_2)^2 - 12] + (PF_2)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (PF_1)^2 + 3 \cdot (PF_2)^2 = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (PF_1)^2 + (PF_2)^2 = \frac{40}{3}$$

$$\left(\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-0)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2}\right)^2=$$

$$=\frac{40}{3}$$

$$\left(x^2+2\sqrt{3}x+3\right)+y^2+\left(x^2-2\sqrt{3}x+3\right)+y^2=\frac{40}{3}$$

$$2x^2+2y^2=\frac{22}{3}\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{11}{3}$$

$$\text{IV)}\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x^2+y^2=\dfrac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x^2}{4}=\dfrac{8}{3}\\ x^2+y^2=\dfrac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

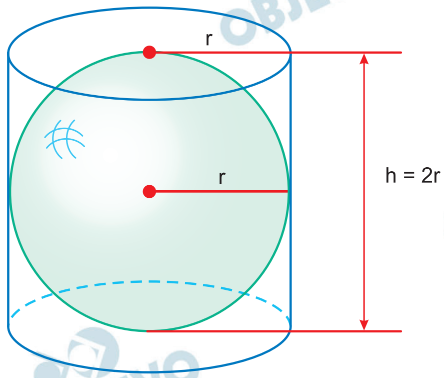
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{32}{9}\\ y^2=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\\ y=\pm\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Resposta: $\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right);\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right);$

$\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right);\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Um cilindro equilátero é apoiado sobre uma de suas bases e parcialmente preenchido com água. Quando uma esfera é colocada em seu interior, de modo a tocar o fundo, o nível de água atinge a altura do cilindro. Se o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro e o volume de água é $2000\dfrac{\pi}{3}\text{cm}^3$, determine a área da superfície lateral do cilindro e o volume da esfera.

Resolução



I) De acordo com o enunciado, temos:

$$V_{esfera} + V_{água} = V_{cilindro} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 + 2000\frac{\pi}{3} = \pi r^2 \,.\, 2r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2000}{3} = 2r^3 - \frac{4r^3}{3} \Rightarrow r^3 = 1000 \Rightarrow r = 10\text{cm}$$

II) A área lateral do cilindro, em centímetros quadrados, é dada por:

$$2\pi r \,.\, 2r = 4\pi r^2 = 4\pi \,.\, 10^2 = 400\pi$$

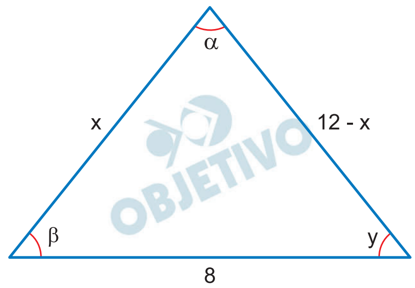
III) O volume da esfera, em centímetros cúbicos, é dado por:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \,.\, 10^3 = 4000\frac{\pi}{3}$$

Respostas: 400π cm^2 e $4000\dfrac{\pi}{3}$ cm^3

Um triângulo tem perímetro 20 o seus ângulos internos α, β e γ satisfazem a igualdade sen(α) + sen(β) + sen(γ) = 2. Sabendo que um dos lados desse triângulo mede 8, determine a medida dos outros dois lados.

Resolução



I) Da Lei dos Senos, temos:

$$\frac{8}{\text{sen }\alpha} = \frac{12-x}{\text{sen }\beta} = \frac{x}{\text{sen }\gamma} = \frac{8+12-x+x}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma} =$$

$$= \frac{20}{2} = 10$$

Assim, $\dfrac{8}{\text{sen }\alpha} = 10 \Rightarrow \text{sen }\alpha = \dfrac{4}{5}$

II) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ ou } \cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

III) Aplicando a Lei dos Cossenos, para $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$**,**

temos:

$$8^2 = x^2 + (12-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (12-x) \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 = x^2 + 144 - 24x + x^2 - \frac{72x}{5} + \frac{6x^2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{5} - \frac{192x}{5} + 80 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 192x + 400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm 2\sqrt{11}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 6 + \sqrt{11} \text{ ou } x = 6 - \sqrt{11}$$

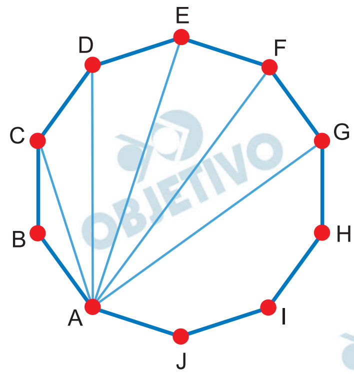
IV) Se $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$**, o problema não tem solução.**

Respostas: $6 + \sqrt{11}$ **e** $6 - \sqrt{11}$

10

Em um decágono convexo, de quantas formas podemos escolher duas diagonais que não se interceptam?

Resolução



Dado o decágono da figura acima, vamos contar os pares de diagonais possíveis a partir do vértice A.

Diagonal $\overline{AC}$:

Dentre os 7 vértices restantes, (D, E, F, G, H, I, J) podemos escolher 2 para a outra diagonal e subtrair os 6 lados formados por eles; a quantidade de diagonais é:

$C_{7,6} - 6 = 21 - 6 = 15$

Diagonal $\overline{AD}$ (vértices restantes: E, F, G, H, I, J), de modo análogo, temos:

$C_{6,2} - 5 = 15 - 5 = 10$

Diagonal $\overline{AE}$ (vértices restantes: F, G, H, I, J), de modo análogo, temos:

$C_{5,2} - 4 = 10 - 4 = 6$

Diagonal $\overline{AF}$ (vértices restantes: G, H, I, J), de modo análogo, temos:

$C_{4,2} - 3 = 6 - 3 = 3$

Diagonal $\overline{AG}$ (vértices restantes: H, I, J), de modo análogo, temos:

$C_{3,2} - 2 = 3 - 2 = 1$

Diagonais $\overline{AH}$ e $\overline{AI}$: não existe nenhuma diagonal que sirva.

Portanto, existem 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35 pares para o vértice A. Considerando que, ao contar para todos os vértices, cada par será contado duas vezes, o número total de pares de diagonais que não se interceptam será dado por $\dfrac{35 \,.\, 10}{2} = 175$

Resposta: 175

Constantes

Constante de Avogadro (N_A) = $6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

Constante de Faraday (F) = $9{,}65 \times 10^4\ C.mol^{-1}$ = $= 9{,}65 \times 10^4\ A.s.mol^{-1} = 9{,}65 \times 10^4\ J.V^{-1}.mol^{-1}$

Carga elementar = $1{,}60 \times 10^{-19}\ C$

Constante dos gases (R) = $8{,}21 \times 10^{-2}\ atm.L.K^{-1}.mol^{-1}$ = $= 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1} = 1{,}98\ cal.K^{-1}.mol^{-1}$

Constante de Planck (h) = $6{,}63 \times 10^{-34}\ J.s$

Velocidade da luz no vácuo = $3{,}0 \times 10^8\ m.s^{-1}$

Número de Euler (e) = 2,72

Definições

Pressão: $1\ atm = 760\ mmHg = 1{,}01325 \times 10^5\ N.m^{-2} = 1{,}01325\ bar$

Energia: $1\ J = 1\ N.m = 1\ kg.m^2.s^{-2} = 6{,}24 \times 10^{18}\ eV$

Condições normais de temperatura e pressão (CNTP): 0°C e 1 atm, equivalente a um volume de um gás ideal de 22,4L.

Condições ambientes: 25°C e 1 atm

Condições-padrão: 1 bar; concentração das soluções = $1\ mol.L^{-1}$ (rigorosamente: atividade unitária das espécies); sólido com estrutura cristalina mais estável nas condições de pressão e temperatura em questão.

(s) = sólido. (ℓ) = líquido. (g) = gás. (aq) = aquoso.

(conc) = concentrado. (ua) = unidades arbitrárias.

u.m.a. = unidade de massa atômica. [X] = concentração da espécie química X em $mol.L^{-1}$

$\ln X = 2{,}3 \log X$

Massas Molares

Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar ($g.mol^{-1}$)
H	1	1,01
Li	3	6,94
C	6	12,01
N	7	14,01
O	8	16,00
Na	11	22,90
Mg	12	24,31
Al	13	26,98
S	16	32,06
Cl	17	35,45
Ca	20	40,08
Cu	29	63,55
Zn	30	65,38
Br	35	79,90
Os	76	190,23
Sg	106	269

1

Considere dois líquidos voláteis, A e B, que são completamente miscíveis entre si e que formam uma solução ideal em toda a amplitude de concentrações. Esses líquidos são adicionados a um tanque fechado, inicialmente sob vácuo, e mantido em temperatura constante (T), na proporção molar 1:1. Considere que a mistura causa um abaixamento na pressão de vapor do líquido A igual a 40 Torr e que a pressão de vapor do líquido B puro é igual a 20 Torr.

Determine os valores numéricos:

a) da pressão de vapor do líquido A puro na temperatura T;

b) da pressão de vapor da solução, depois de atingido o equilíbrio do sistema;

e) da composição molar da fase vapor em equilíbrio com a fase líquida presente no tanque.

Resolução

P^0 = pressão de vapor do líquido puro.

$P_B^0 = 20$ Torr $\quad P_A = (P_A^0 - 40)$ Torr

Proporção em mols 1 : 1 $\quad X_A + X_B = 1$

$X_A = 0,5, X_B = 0,5$

a) Lei de Raoult $P_A = X_A\ P_A^0$

$P_A^0 - 40 = 0,5\ P_A^0 \ \therefore\ 0,5\ P_A^0 = 40$

$P_A^0 = 80$ Torr

b) P: pressão de vapor da solução

$P = X_A P_A^0 + X_B P_B^0$

$P = 0,5 \cdot 80$ Torr $+ 0,5 \cdot 20$ Torr

$P = 50$ Torr

c) Cálculo da composição molar (X)

$P_A = X_A \cdot P \ \therefore\ P_A = (80 - 40)$ Torr $= 40$ Torr

40 Torr $= X_A \cdot 50$Torr $\therefore\ X_A = 0,8$

Como $X_A + X_B = 1$

$0,8 + X_B = 1 \ \therefore\ X_B = 0,2$

Resposta: 80% em mol de A

20% em mol de B

2

O ácido fórmico pode ser obtido por meio de uma reação de duas etapas. Na primeira etapa, em temperatura de 200°C e pressão de 10 atm, monóxido de carbono e hidróxido de sódio reagem. Na segunda, o produto dessa primeira etapa reage com ácido sulfúrico, formando-se o ácido fórmico.

Sobre esse processo, apresente:

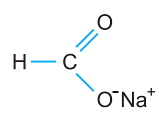
a) a fórmula estrutural do produto gerado na primeira etapa;

b) a equação química balanceada da primeira etapa;

c) a equação química balanceada da segunda etapa.

Resolução

a) O produto gerado na primeira etapa é o metanoato de sódio cuja fórmula estrutural é



b) Equação química balanceada da primeira etapa:

$$\mathbf{CO + NaOH \xrightarrow[200°C]{10\ atm} HCOONa}$$

c) Equação química balanceada da segunda etapa:

$$\mathbf{2HCOONa + H_2SO_4 \rightarrow \underbrace{2HCOOH}_{\text{ácido fórmico}} + Na_2SO_4}$$

3

Um determinado sistema consiste em dois sólidos, A e B, cada qual com uma quantidade igual a 1 mol. Considere que os sólidos estão fisicamente separados, mas em contato térmico por meio de uma parede condutora de calor, a qual garante que estejam em equilíbrio térmico em todos os instantes. A temperatura inicial desse sistema é igual a –10°C. O sistema é aquecido até atingir a temperatura de 20°C. A temperatura de fusão de A é igual a 0°C e a de B é igual a 10°C. Considere ainda os dados a seguir.

I. Variação de entalpia de fusão, de A, $\Delta H_{fusão}(A) = 1 kJ\ mol^{-1}$, e de B, $\Delta H_{fusão}(B) = 2\ kJ\ mol^{-1}$;

II. Capacidade calorífica molar sob pressão constante, de A sólido, $C_{p,sólido}(A) = 30\ J\ mol^{-1}K^{-1}$, e de B sólido, $C_{p,sólido}(B) = 20 J\ mol^{-1}K^{-1}$;

III. Capacidade calorífica molar sob pressão constante, de A líquido, $C_{p,líquido}(A) = 50\ J\ mol^{-1}K^{-1}$, e de B líquido, $C_{p,líquido}(B) = 100\ J\ mol^{-1}K^{-1}$.

Desenhe um gráfico da temperatura do sistema, em °C, em função da quantidade de calor fornecida, em kJ, indicando o fenômeno físico e o valor numérico da quantidade de calor fornecida em cada etapa do processo de aquecimento, até a temperatura final ser atingida.

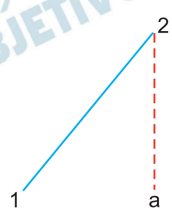
Resolução

- **Calor fornecido quando o sistema é aquecido de –10°C para 0°C ($\Delta\theta = 10°C, \Delta\theta = 10K$)**

Sólido A: $Q_A = C_A \cdot \Delta\theta = 30\ \dfrac{J}{K} \cdot 10K = 300J$

Sólido B: $Q_B = C_B \cdot \Delta\theta = 20\ \dfrac{J}{K} \cdot 10K = 200J$

- **Calor fornecido ao sistema:**
300J + 200J = 500J ∴ 0,5kJ

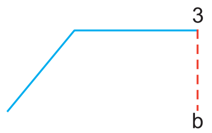


1: –10°C
2: 0°C
a: 0,5kJ

- **Calor fornecido para fusão do sólido A:**

$Q = n\ \Delta H_{fusão}\ \therefore\ Q = 1\ mol \cdot 1 \dfrac{kJ}{mol} = 1kJ$

- **Calor fornecido ao sistema:**
  0,5kJ + 1kJ = 1,5kJ



3: 0°C
b: 1,5kJ

- **Calor fornecido quando o sistema é aquecido de 0°C para 10°C ($\Delta\theta = 10°C$, $\Delta\theta = 10K$)**

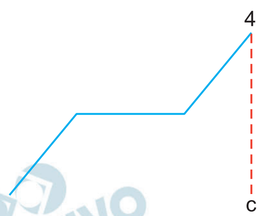
  Líquido A:

  $$Q_A = C_A \,.\, \Delta\theta = 50 \,\frac{J}{K}\,.\, 10K = 500J = 0{,}5kJ$$

  Sólido B:

  $$Q_B = C_B \,.\, \Delta\theta = 20 \,\frac{J}{K}\,.\, 10K = 200J = 0{,}2kJ$$

- **Calor fornecido ao sistema:**
  1,5kJ + 0,5kJ + 0,2kJ = 2,2kJ

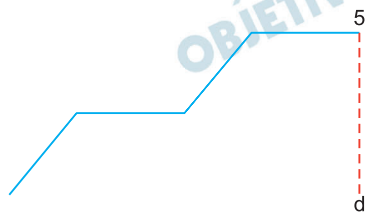


4: 10°C
c: 2,2kJ

- **Calor fornecido para fusão do sólido B:**

  $$Q = n\,\Delta H_{fusão} = 1\text{ mol} \,.\, 2\,\frac{kJ}{mol} = 2kJ$$

- **Calor fornecido ao sistema:**
  2,2kJ + 2kJ = 4,2kJ



5: 10°C
d: 4,2kJ

- **Calor fornecido quando o sistema é aquecido de 10°C para 20°C ($\Delta\theta = 10°C$, $\Delta\theta = 10K$)**

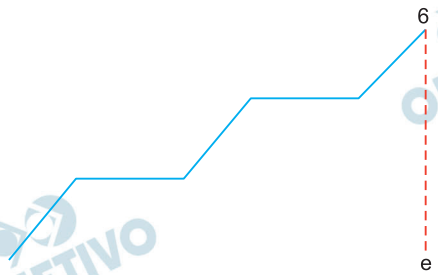
  Líquido A:

  $$Q_A = C_A \,.\, \Delta\theta = 50 \,\frac{J}{K}\,.\, 10K = 500J = 0{,}5kJ$$

  Líquido B:

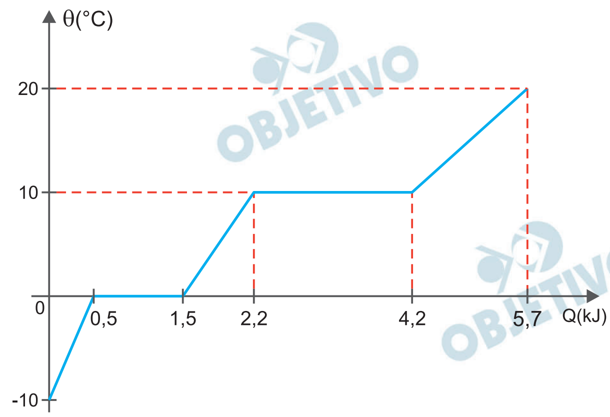
  $$Q_B = C_B \,.\, \Delta\theta = 100 \,\frac{J}{K}\,.\, 10K = 1000J = 1kJ$$

- **Calor fornecido ao sistema:**
  4,2kJ + 0,5kJ + 1kJ = 5,7kJ



6: 20°C
e: 5,7kJ

Gráfico completo:



Fenômenos físicos:

1) **–10°C a 0°C – aquecimento dos sólidos A e B.**
2) **0°C: fusão do sólido A.**
3) **0°C a 10°C – aquecimento do líquido A e do sólido B.**
4) **10°C: fusão do sólido B.**
5) **10°C a 20°C: aquecimento dos líquidos A e B.**

4

Duas soluções aquosas, contendo os cátions genéricos, A^+ e B^+, são preparadas com as concentrações iniciais descritas a seguir.

Solução 1: $[A^+] = 2 \times 10^{-2}$ mol L^{-1} e $[B^+] = 1 \times 10^{-4}$ mol L^{-1}.

Solução 2: $[A^+] = 5 \times 10^{-2}$ mol L^{-1} e $[B^+] = 1 \times 10^{-3}$ mol L^{-1}.

A cada uma dessas soluções são adicionadas quantidades progressivas de um ânion C^-, sem variação significativa do volume das soluções. Considere que os produtos de solubilidade dos sólidos AC(s) e BC(s) são iguais a 1×10^{-7} e 1×10^{-9}, respectivamente.

Com base nessas informações, determine o que se pede para a **solução 1** e para a **solução 2**.

a) Qual sólido será formado primeiro com a adição progressiva de C^- a cada uma das soluções? Justifique a sua resposta.

b) Conforme C^- é progressivamente adicionado, o segundo sólido começa a se formar. Nesse momento, qual é a concentração em solução do cátion desse primeiro sólido precipitado em cada solução?

Resolução

a) **O sólido que precipita primeiro apresenta a menor concentração em mol/L de C^-, isto é, o K_{PS} será atingido antes do outro sólido.**

Solução 1:

$$AC(s) \rightleftarrows A^+(aq) + C^-(aq) \qquad K_{PS} = 1 \,.\, 10^{-7}$$
$$2 \,.\, 10^{-2} \text{mol/L}$$

$$K_{PS} = [A^+]\,[C^-] \therefore 1 \,.\, 10^{-7} = 2 \,.\, 10^{-2} \,.\, [C^-]$$

$[C^-] = 5 \,.\, 10^{-6}$**mol/L (menor)**

$$BC(s) \rightleftarrows B^+(aq) + C^-(aq) \qquad K_{PS} = 1 \,.\, 10^{-9}$$
$$1 \,.\, 10^{-4} \text{mol/L}$$

$$K_{PS} = [B^+]\,[C^-] \therefore 1 \,.\, 10^{-9} = 1 \,.\, 10^{-4} \,.\, [C^-]$$

$[C^-] = 1 \,.\, 10^{-5}$**mol/L (maior)**

Conclusão: AC precipita primeiro

Solução 2:

Usando-se o mesmo critério, temos:

$$AC(s) \quad K_{PS} = [A^+]\,[C^-] \therefore 1 \,.\, 10^{-7} = 5 \,.\, 10^{-2} \,.\, [C^-]$$

$[C^-] = 2 \,.\, 10^{-6}$**mol/L (maior)**

$$BC(s) \quad K_{PS} = [B^+]\,[C^-] \therefore 1 \,.\, 10^{-9} = 1 \,.\, 10^{-3} \,.\, [C^-]$$

$[C^-] = 1 \,.\, 10^{-6}$**mol/L (menor)**

Conclusão: BC precipita primeiro

b) **Solução 1: o segundo sólido que começa a precipitar é o BC, portanto, $[C^-]$ é 10^{-5}mol/L:**

$$AC(s) \rightleftarrows A^+(aq) + C^-(aq) \qquad K_{PS} = 1 \,.\, 10^{-7}$$

$$K_{PS} = [A^+]\,[C^-] \therefore 1 \,.\, 10^{-7} = [A^+] \,.\, 10^{-5}$$

$[A^+] = 1 \,.\, 10^{-2}$**mol/L**

Solução 2: o segundo sólido que começa a precipitar é o AC, portanto, $[C^-]$ é $2 \cdot 10^{-6}$mol/L:

$BC(s) \rightleftarrows B^+(aq) + C^-(aq) \qquad K_{PS} = 1 \cdot 10^{-9}$

$K_{PS} = [B^+]\,[C^-] \therefore 1 \cdot 10^{-9} = [B^+] \cdot 2 \cdot 10^{-6}$

$[B^+] = 5 \cdot 10^{-4}$mol/L

5

Uma amostra de 5,480g de uma mistura de óxido e carbonato de um mesmo metal (com um estado de oxidação igual a +2 nesses compostos) é completamente dissolvida em excesso de ácido clorídrico. Nesse processo, 0,448L (condições normais) de gás são liberados.

Com base nessas informações, determine os valores numéricos

a) da composição da mistura, em frações mássicas, se a quantidade em mol de carbonato na mistura é duas vezes maior do que a quantidade do óxido;

b) da concentração molar do sal formado na solução resultante, se o volume final da dissolução é igual a 200 mL.

Resolução

metal: Me ; Me^{2+}

Óxido: MeO; Carbonato: $MeCO_3$

$m_{(mistura)} = 5{,}480$ g; volume liberado = 0,448 L

a) $n_{MeCO_3} = 2\, n_{MeO}$

$MeO + 2\,HCl \longrightarrow MeCl_2 + H_2O$

$MeCO_3 + 2\,HCl \rightarrow MeCl_2 + H_2O + \underset{\text{gás}}{CO_2}$

$$22{,}4\text{ L} — 1\text{ mol}$$
$$0{,}448\text{ L} — n$$

0,02 mol ——————— n = 0,02 mol

$n_{MeCO_3} = 0{,}02$ mol $\therefore$ $n_{MeO} = 0{,}01$ mol

$m = m_{MeO} + m_{MeCO_3}$; $n = \dfrac{m}{M} \rightarrow$ massa molar

$m = n_{MeO}\, M_1 + n_{MeCO_3}\, M_2$

$5{,}48 = 0{,}01\,(M' + 16) + 0{,}02\,(M' + 60)$

$M' = 137{,}33$ g/mol M' = massa molar do metal

$MeO: M_1 = (137{,}33 + 16)$ g/mol $\therefore M_1 = 153{,}33$ g/mol

$MeO:\ n = \dfrac{m}{M_1} \therefore 0{,}01\text{ mol} = \dfrac{m}{153{,}33\text{ g/mol}}$

$m = 1{,}53$ g

$$\text{MeO}\quad \begin{matrix} 5{,}48\text{ g} — 100\% \\ 1{,}53\text{ g} — P \end{matrix} \quad \therefore \quad P \cong 28\%$$

Portanto, $MeCO_3$: 72%

b) MeO $MeCl_2$

0,01 mol 0,01 mol

$MeCO_3$ $\quad$ MCl_2

0,02 mol $\quad$ 0,02 mol

$MeCl_2 : n_{total} = 0{,}03\text{ mol}$

$V = 200\text{ mL} = 0{,}2\text{ L}$

$$\mathcal{M} = \frac{n}{V}$$

$$\mathcal{M} = \frac{0{,}03\text{ mol}}{0{,}2\text{ L}} \quad \therefore \quad \mathcal{M} = 0{,}15\text{ mol/L}$$

6

Suponha que, em medições experimentais realizadas no espaço sideral, foi descoberto um sistema formado de gás hidrogênio atômico excitado. A energia desse hidrogênio excitado é igual a –0,34 meV, fazendo com que o sistema emita um espectro de ondas eletromagnéticas de forma aparentemente contínua. Considere o modelo do átomo proposto por Bohr para descrever esse sistema. Considere, ainda, que a energia do átomo de hidrogênio no estado fundamental é –13,6 eV e que o raio do átomo de hidrogênio no estado fundamental é igual a 53 pm.

Acerca desse sistema, determine o que se pede a seguir.

a) Qual é o nível de energia no qual os átomos de hidrogênio excitados se encontram?

b) Qual é o raio da órbita do elétron ao redor do próton nesses átomos de hidrogênio?

e) Qual é a razão entre a velocidade do elétron do átomo de hidrogênio no estado fundamental e no estado excitado?

Resolução

a) A energia de cada nível, de acordo com a teoria de Bohr, é dada pela fórmula:

$$E_n = -\frac{13,6eV}{n^2}$$

Energia do átomo de hidrogênio excitado:

$$E_n = -0,34meV = -0,34 \cdot 10^{-3}eV$$

$$-0,34 \cdot 10^{-3}eV = -\frac{13,6eV}{n^2} \therefore n^2 = 4 \cdot 10^4$$

$$\boxed{n = 200}$$

b) n = 1 (fundamental), r_1 = 53pm

O raio da órbita do elétron é dado pela expressão:

$$r_n = n^2 \cdot r_1$$

$$r_{200} = 53pm\ (200)^2$$

$$\boxed{r_{200} = 212 \cdot 10^4 pm}$$

c) v_1 = velocidade do elétron no estado fundamental
v_{200} = velocidade do elétron no estado excitado
O momento angular (m v) do elétron é dado pela expressão

$$mv = \frac{\hbar \cdot n}{r} \quad \text{sendo } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

m e $\hbar$ são iguais nos dois casos.

$$\frac{m}{\hbar} = \frac{n}{vr}$$

$$\frac{n_1}{v_1 r_1} = \frac{n_{200}}{v_{200} \cdot r_{200}}$$

$$\frac{v_1}{v_{200}} = \frac{n_1 \cdot r_{200}}{n_{200} \cdot r_1}$$

$$\frac{v_1}{v_{200}} = \frac{1 \,.\, 53(200)^2}{200 \,.\, 53}$$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_{200}} = 200}$$

7

A primeira determinação experimental do tamanho de um núcleo foi feita a partir dos resultados do espalhamento de Rutherford de partículas α. Os resultados evidenciaram uma dependência entre o raio nuclear (R) e o número de massa (A), através da relação:

$$R = R_0A^{1/3},$$

em que R_0 é uma constante.

Com base nessas informações, calcule o valor numérico:

a) da densidade nuclear para o ${}_{29}Cu^{63}$, considerando que o raio para ${}_{30}Zn^{64}$ é 4,8 x 10^{-15}m;

b) da razão entre os raios nucleares do isótopo de magnésio ${}_{12}Mg^{24}$ e do isótopo de ósmio ${}_{76}Os^{192}$;

c) da densidade nuclear para o seabórgio ${}_{106}Sg^{271}$, comparando-a com o valor da densidade nuclear do ${}_{29}Cu^{63}$ obtida no item (a) acima.

Resolução

a) $R_{Zn} = 4,8 \,.\, 10^{-15}$ m

$R_{Zn} = R_0A^{1/3}$

$4,8 \,.\, 10^{-15}$ m $= R_0(64)^{1/3}$

$R_0 = 1,2 \,.\, 10^{-15}$ m

$$\text{Densidade nuclear} = \frac{m_{\text{núcleo}}}{V_{\text{núcleo}}}$$

$$m_{\text{núcleo}} = \frac{A}{6,02 \,.\, 10^{23}} \text{ (g)}$$

$$V_{\text{núcleo}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (R_0A^{1/3})^3$$

$$d = \frac{\dfrac{A}{6,02 \,.\, 10^{23}}}{\dfrac{4}{3}\pi R_0A} = \frac{3}{6,02 \,.\, 10^{23}\, 4\pi (R_0)^3}$$

$$d = \frac{3}{6,02 \,.\, 10^{23} \,.\, 4 \,.\, 3,14\, (1,2 \,.\, 10^{-15})^3}$$

$d = 2,3 \,.\, 10^{20}$g/m^3

b) $$\frac{R_{Mg}}{R_{Os}} = \frac{R_0\, 24^{1/3}}{R_0\, 192^{1/3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}$$

$$\frac{R_{Mg}}{R_{Os}} = \frac{1}{2}$$

c) A densidade nuclear não depende do número de massa.

$$d = \frac{3}{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 4\pi \cdot (R_0)^3}$$

Portanto, a densidade nuclear do $^{271}_{106}Sg$ vale $2{,}3 \cdot 10^{20}$ g/m^3.

O método de obtenção de magnésio metálico consiste nas seguintes etapas:

I. Uma amostra de carbonato de cálcio sólido é aquecida a altas temperaturas, formando um produto sólido A e um gasoso B.

II. Em seguida, o sólido A é tratado com água do mar, formando-se um hidróxido pouco solúvel que se ioniza formando os produtos C e D.

III. Os ânions D reagem com cátions Mg^{2+} da água do mar. O resultado é um precipitado E.

IV. O composto E é separado por filtração e dissolvido por meio da adição de uma solução aquosa de ácido clorídrico.

V. A seguir, o solvente da solução é evaporado, obtendo-se o sal iônico F seco.

VI. Finalmente, o sal F é submetido a uma eletrólise ígnea.

Determine o que se pede.

a) Apresente as equações químicas balanceadas que representam as reações, identificando os produtos A, B, C, D, E e F formados.

b) Em relação à eletrólise ígnea, mostre as semiequações que representam as semirreações que ocorreram no anodo e no catodo, assim como a reação global.

Resolução

a) I) $$\underset{}{CaCO_3(s)} \xrightarrow{\Delta} \underset{A}{CaO(s)} + \underset{B}{CO_2(g)}$$

II) $$CaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ca(OH)_2(aq) \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \underset{C}{Ca^{2+}(aq)} + \underset{D}{2OH^-(aq)}$$

III) $$Mg^{2+}(aq) + 2OH^-(aq) \rightarrow \underset{E}{Mg(OH)_2(s)}$$

IV) $$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O$$

V) $$MgCl_2(aq) \xrightarrow{\Delta} \underset{F}{MgCl_2(s)}$$

b) $$MgCl_2(s) \rightarrow Mg^{2+}(l) + 2Cl^-(l)$$

catodo: $Mg^{2+}(l) + 2e^- \rightarrow Mg(l)$

anodo: $2Cl^-(l) \rightarrow 2e^- + Cl_2(g)$

Global: $MgCl_2(s) \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$

9

Apresente os compostos orgânicos formados a partir das reações do etanoato de metila com os seguintes reagentes:

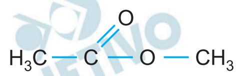
I. solução aquosa de ácido clorídrico.

II. solução aquosa de hidróxido de sódio.

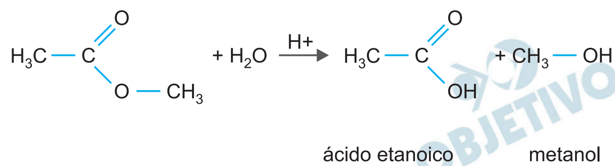
III. amônia gasosa.

IV. Li(A*l*H_4) dissolvido em dietil éter, seguido da adição de uma solução aquosa ácida.

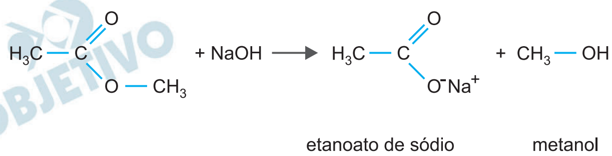
Resolução

Etanoato de metila: 

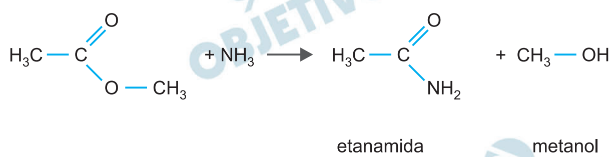
I) Hidrólise ácida de éster



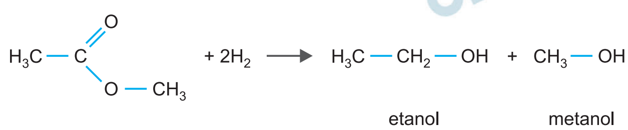
II) Hidrólise básica de éster



III) Amonólise do éster



IV) Redução do éster (LiA*l*H_4 fornecendo H_2)



10

Considere o composto de fórmula C_4H_8.

Apresente:

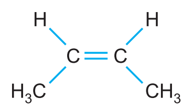
a) os seis isômeros estruturais e geométricos;

b) a fórmula estrutural dos produtos dibromados formados nas reações de cada um desses seis isômeros com Br_2. Considere que as condições das reações são adequadas para que ocorram de forma completa e produtos dibromados sejam gerados.

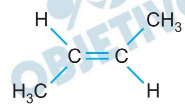
Resolução

a) Os seis isômeros estruturais e geométricos do C_4H_8.

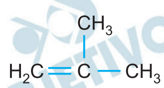
but-1-eno



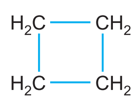
cis-but-2-eno



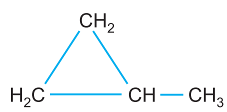
trans-but-2-eno



metilpropeno

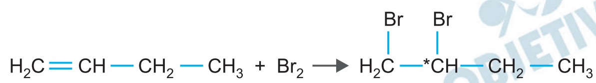


ciclobutano

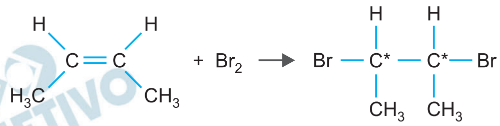


metilciclopropano

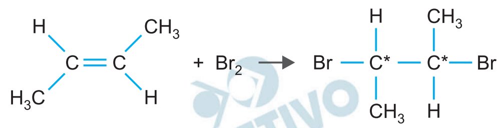
b) Carbono quiral = C*



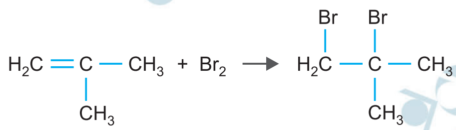
dextrogiro + levogiro

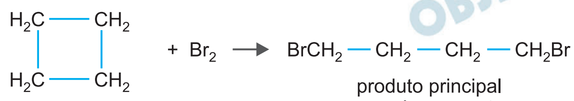


dextrogiro + levogiro + meso

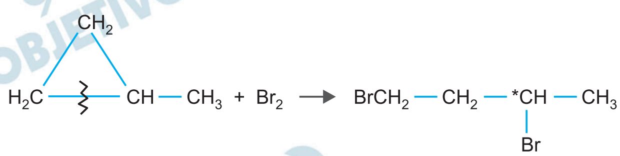


dextrogiro + levogiro + meso





produto principal
prevalece reação
de adição
(ciclos com 3C ou 4C).



dextrogiro + levogiro